

基于 HLLC 格式的理想 MHD 方程 数值模拟

张向洪

(南京理工大学 能源与动力工程学院, 南京 210094)

摘 要: 针对理想 MHD(magnetohydrodynamics)方程数值求解困难的问题,基于原始的 HLLC(Harten-Lax-Van Leer Contact wave)近似黎曼解方法,发展出一种新的适用于理想 MHD 问题的通量计算格式。控制方程采用有限体积法离散,时间推进采用隐式的 LU-SGS(lower-upper symmetric Gauss-Seidel)格式,并且采用双曲型散度清除技术来抑制磁场散度的累积。通过一维激波管问题的数值模拟表明,HLLC-MHD 格式能准确的分辨并捕捉复杂的磁流体力学波系结构,保证数值计算的精度,最大的数值计算误差不超过 10%;通过二维的 Rotor 问题的数值模拟研究表明,HLLC-MHD 格式能够应用于多维理想 MHD 问题的数值模拟,并且能够准确捕捉多维情况下磁流场中的阿尔文波;通过对比有、无散度清除的 Rotor 问题计算结果表明,双曲型散度清除技术可以将磁场散度峰值从 50 降低到 2,有效抑制高磁场散度区域的散度累积,同时也会将误差传播到低散度区域,并且引起边界处散度的累积,影响计算的稳定性。

关 键 词: 理想 MHD 方程; 有限体积法; 散度清除; 近似黎曼解; 阿尔文波

中图分类号: V211.3 **文献标志码:** A

Numerical simulation of ideal MHD equations using HLLC scheme

ZHANG Xianghong

(School of Energy and Power Engineering,
Nanjing University of Science and Technology, Nanjing 210094, China)

Abstract: A new flux calculating method based on the original HLLC (Harten-Lax-Vanleer contact wave) approximate riemann solver for ideal magnetohydrodynamics (MHD) equations was developed. The governing equations were discretized by finite volume method, and the time integration employed the implicit LU-SGS (lower-upper symmetric Gauss-Seidel) scheme. A hyperbolic divergence cleaning technique was introduced to suppress divergence of magnetic field. The numerical results of 1-D MHD shock-tube problem showed that HLLC-MHD scheme could accurately capture the magnetohydrodynamics waves, and the maximum numerical error was not more than 10%. The results of 2-D Rotor problem showed that HLLC-MHD scheme could be used to simulate the multi-dimension ideal MHD problem and accurately capture the Alfven wave of magnetic field. By comparing the results with and without divergence cleaning technique, the hyperbolic divergence cleaning technique could drop the peak value of magnetic field divergence from 50 to 2, and restrain the magnetic field divergence accumulation in the high divergence region, but also propagate the error to

the low divergence region and cause the accumulation of the divergence at the boundary. It will influence the stability of the calculation.

Key words: ideal MHD equations; finite volume method; divergence clean; approximate Riemann solver; Alfven wave

磁流体力学 (magnetohydrodynamic, 简称 MHD) 属于电磁学与流体力学的交叉学科, 广泛应用于天体物理、热核物理与宇航工程等学科重要问题的数值模拟, 近年来, 其在高超声速流动控制方面的应用, 逐渐成为国内外研究的热点之一。MHD 方程组包含了流体力学的三大守恒方程、电磁本构方程、欧姆定律与 Maxwell 方程组, 若假设流体流动无内热源、黏性、静电力、位移电流且流体无电阻, 那么 MHD 方程组可以化简为理想 MHD 方程组^[1]。

通过分析可知, 理想 MHD 方程组的无黏雅可比矩阵存在一个零特征值, 方程组是奇异的, 这为控制方程的数值求解带来了巨大的困难。针对理想 MHD 方程组的数值计算, 国内外已经开展了许多尝试, 发展了一系列的计算格式^[2-9]。由于控制方程具有奇异性, 许多格式在扩展应用于多维理想 MHD 方程组计算时, 都需要引入修正, 并且很多格式都需要知道理想 MHD 方程组的左、右特征向量, 而这是非常复杂的过程^[9]。对于理想 MHD 方程组的数值模拟, 客观上讲, 发展高精度、高计算效率的数值计算格式是目前发展的趋势。

HLL (Harten-Lax-Van Leer) 类近似黎曼解方法最早源于 Harten、Lax 与 Van Leer^[10] 的思想, 如果选择合适的波速计算方法, 该格式将具有良好的保正性, 但是原始的 HLL 类格式耗散过大, 无法精确捕捉到接触间断, Toro 等人^[11] 通过引入中间波速, 恢复了 HLL 格式对接触间断的捕捉能力, 发展出 HLLC 格式。由于 HLLC 格式具有计算精度高、鲁棒性好以及易于编程实现的特点, 其被广泛应用与各种复杂流动现象的数值模拟。Gurski 等人^[12] 应用 HLLC 格式模拟了一维理想 MHD 方程, 但是直接将 HLLC 格式应用于理想 MHD 方程计算时, 会遇到两个问题^[13-14]:

- 1) 离散后的通量不满足守恒性条件。
 - 2) 无法精确捕捉 Alfven 波。
- 本文针对以上两个问题, 采用 Miyoshi 等人^[14]

提出的修正方法, 发展了适用于理想 MHD 方程计算的 HLLC 格式 (HLLC-MHD 格式), 并进行了数值模拟验证研究。

1 控制方程

1.1 理想 MHD 控制方程

直角坐标系下, 理想 MHD 控制方程为^[6]

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial G}{\partial z} = 0 \tag{1}$$

式中 Q 为守恒变量; E, F, G 为 3 个方向的无黏通量, 如下:

$$Q = [\rho \quad \rho u \quad \rho v \quad \rho w \quad B_x \quad B_y \quad B_z \quad \rho e_t]^T \tag{2}$$

$$E = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p + \frac{\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}}{2\mu_e} - \frac{B_x^2}{\mu_e} \\ \rho uv - \frac{B_x B_y}{\mu_e} \\ \rho uw - \frac{B_x B_z}{\mu_e} \\ u B_x - v B_y \\ u B_y - v B_x \\ u B_z - w B_x \\ \left(\rho e_t + p + \frac{\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}}{2\mu_e}\right)u - \frac{\mathbf{U} \cdot \mathbf{B}}{\mu_e} B_x \end{bmatrix} \tag{3}$$

$$F = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho vu - \frac{B_y B_x}{\mu_e} \\ \rho v^2 + p + \frac{\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}}{2\mu_e} - \frac{B_y^2}{\mu_e} \\ \rho vw - \frac{B_y B_z}{\mu_e} \\ v B_x - u B_y \\ v B_y - v B_y \\ v B_z - w B_y \\ \left(\rho e_t + p + \frac{\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}}{2\mu_e}\right)v - \frac{\mathbf{U} \cdot \mathbf{B}}{\mu_e} B_y \end{bmatrix} \tag{4}$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \rho w \\ \rho u w - \frac{B_x B_z}{\mu_e} \\ \rho v w - \frac{B_y B_z}{\mu_e} \\ \rho w^2 + p + \frac{\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}}{2\mu_e} - \frac{B_z^2}{\mu_e} \\ w B_x - u B_z \\ w B_y - v B_z \\ w B_z - w B_z \\ \left(\rho e_t + p + \frac{\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}}{2\mu_e} \right) w - \frac{\mathbf{U} \cdot \mathbf{B} B_z}{\mu_e} \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$\rho e_t = \frac{1}{2} \rho \mathbf{U} \cdot \mathbf{U} + \frac{p}{\gamma - 1} + \frac{\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}}{2\mu_e} \quad (6)$$

式中 p, ρ 为密度与压强; $\mathbf{U}, \mathbf{B}$ 为速度矢量与磁感应强度矢量; u, v, w 为速度在 3 个坐标轴上的分量; B_x, B_y, B_z 分别为磁感应强度在 3 个坐标轴上的分量; μ_e 为磁导率; e_t 为单位质量的总能; γ 为气体比热比。

1.2 双曲型散度清除方法

MHD 控制方程中隐含了磁场高斯定律, 即理论上流场中的磁场散度恒为零。对于一维情况, 由于 B_x 为常数, 且磁场在 y, z 两个方向的导数皆为零, 所以磁场高斯定律自动满足; 对于多维情况, 由于数值离散精度等原因的影响, $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ 的条件并不满足, 且随着计算误差的累积, 磁场散度可能会不断增大, 最终导致计算失败, 因而, 如何清除数值计算过程中产生的伪磁场散度成为 MHD 数值模拟成败的关键, 国外已有学者做了先期研究^[15-17], 本文采用双曲型散度清除技术^[15]来抑制散度的累积。

双曲型散度清除方法通过引入新变量 ϕ 来约束磁感应强度矢量 $\mathbf{B}$ 的变化, 当 $\mathbf{B}$ 变化产生新的散度的时候, ϕ 的值也会发生相应的改变, 以促使新产生的磁场散度一边耗散一边向计算域的边界扩散。经过修改后的控制方程称为 EGLM-MHD 方程组 (EGLM, extended generalized lagrange multiplier), 具体表达式如下^[15]:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{U}) = 0 \quad (7)$$

$$\frac{\partial (\rho \mathbf{U})}{\partial t} + \nabla \cdot \left[\rho \mathbf{U} \mathbf{U} + \left(p + \frac{\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}}{2\mu_e} \right) \mathbf{I} - \frac{\mathbf{B} \mathbf{B}}{\mu_e} \right] = -(\nabla \cdot \mathbf{B}) \mathbf{B} \quad (8)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \nabla \cdot (\mathbf{U} \mathbf{B} - \mathbf{B} \mathbf{U} + \phi \mathbf{I}) = -(\nabla \cdot \mathbf{B}) \mathbf{U} \quad (9)$$

$$\frac{\partial (\rho e_t)}{\partial t} + \nabla \cdot \left[\left(\rho e_t + p + \frac{\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}}{2\mu_e} \right) \mathbf{U} - \frac{\mathbf{B}}{\mu_e} (\mathbf{U} \cdot \mathbf{B}) \right] = -(\nabla \cdot \mathbf{B}) \mathbf{U} \cdot \mathbf{B} - \mathbf{B} \cdot (\nabla \phi) \quad (10)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + c_h^2 \nabla \cdot \mathbf{B} = -\mathbf{U} \cdot \nabla \phi - \frac{c_h^2}{c_p^2} \phi \quad (11)$$

式中 c_h, c_p 为与时间步长、网格空间尺度相关的新参数, 定义如下:

$$c_h = \frac{c_{\text{eff}}}{\Delta t} h_{\min}, \quad c_p = \sqrt{-\Delta t \frac{c_h^2}{\ln c_d}} \quad (12)$$

式中 Δt 为时间步长, $h_{\min}$ 为所有网格单元中最短的高的长度, $c_d \in (0, 1)$ 为人为给定的参数。对于 EGLM-MHD 方程组, 源项的计算采用有限体积法, 对流通量中多出了一组附加通量, 以 x 方向的通量为例, 如下:

$$\mathbf{E}_{\text{bb}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \phi' & 0 & 0 & 0 & C_h^2 B'_x \end{pmatrix} \quad (13)$$

新的对流通量可以表示为

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \mathbf{E}_{\text{bb}} \quad (14)$$

式中 $\mathbf{E}_{\text{bb}}$ 由交界面的 ϕ' 与 B'_x 直接计算, 参见文献 [15]。

2 HLLC-MHD 格式

HLLC 格式是在 HLL 格式的基础上引入中间波速 S^* , 恢复格式对接触间断与剪切波的捕捉能力, 其中心思想是假设黎曼问题的解的结构被 3 组波分成四个部分, 如下:

$$\mathbf{E}_{1/2} = \begin{cases} \mathbf{E}_l & 0 \leq S_l \\ \mathbf{E}_l + S_l (\mathbf{Q}_l^* - \mathbf{Q}_l) & S_l \leq 0 \leq S^* \\ \mathbf{E}_r + S_r (\mathbf{Q}_r^* - \mathbf{Q}_r) & S^* \leq 0 \leq S_r \\ \mathbf{E}_r & S_r \geq 0 \end{cases} \quad (15)$$

式中 $\mathbf{Q}_l^*, \mathbf{Q}_r^*$ 为接触间断处左、右两边的守恒变量, 计算方法参见文献 [18]; S_l 与 S_r 为左行、右行波的波速, 本文采用 Einfeldt^[19] 提出的波速计算公式

$$\begin{cases} S_l = \min(u_l - c_l, \hat{u} - \hat{c}) \\ S_r = \max(u_r + c_r, \hat{u} + \hat{c}) \end{cases} \quad (16)$$

式中 $\hat{u}, \hat{c}$ 为法向速度与声速的 Roe 平均值。原始 HLLC 格式的中间波速 S^* 如下式^[18]:

$$S^* = \frac{p_r - p_l + \rho_l u_l (S_l - u_l) - \rho_r u_r (S_r - u_r)}{\rho_l (S_l - u_l) - \rho_r (S_r - u_r)} \quad (17)$$

当使用 HLLC 格式计算理想 MHD 方程时,

中间波速与接触间断处的流场参数都与原始 HLLC 格式不同,接触间断处的波速 S^* 与压强 p^* 计算公式为

$$S^* = \frac{p_r - p_l + \rho_l u_l (S_l - u_l) - \rho_r u_r (S_r - u_r)}{\rho_l (S_l - u_l) - \rho_r (S_r - u_r)} + \frac{(B_{xl}^2 - B_{xr}^2)/\mu_e}{\rho_l (S_l - u_l) - \rho_r (S_r - u_r)} \quad (18)$$

$$p_l^* = \rho_l (S_l - u_l) (S^* - u_l) + p_l + \frac{B_{xl}^{*2} - B_{xl}^2}{\mu_e} \quad (19)$$

$$p_r^* = \rho_r (S_r - u_r) (S^* - u_r) + p_r + \frac{B_{xr}^{*2} - B_{xr}^2}{\mu_e} \quad (20)$$

压强表达式为

$$p = p_{\text{gas}} + 0.5 \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{B} / \mu_e \quad (21)$$

式中 p_{gas} 为气体压强,因为接触间断左右压强必须满足条件 $p^* = p_l^* = p_r^*$,所以由式(19)和式(20)可知

$$B_{xl}^* = B_{xr}^* \quad (22)$$

接触间断处的法向速度满足条件 $u_l^* = u_r^* = S^*$,由 Toro^[18] 原始 HLLC 格式的推导过程可知,接触间断处其他变量计算如下:

$$\rho_k^* = \rho_k (S_k - u_k) / (S_k - S^*) \quad (23)$$

$$\rho_k^* v_k^* = \rho_k^* v_k - \frac{B_{xk}^* B_{yk}^* - B_{xk} B_{yk}}{(S_k - S^*) \mu_e} \quad (24)$$

$$\rho_k^* w_k^* = \rho_k^* w_k - \frac{B_{xk}^* B_{zk}^* - B_{xk} B_{zk}}{(S_k - S^*) \mu_e} \quad (25)$$

$$\rho_k^* e_{ik}^* = \rho_k^* e_{ik} + (p^* S^* - p_k u_k) / (S_k - S^*) - \frac{B_{xk}^* (\mathbf{B} \cdot \mathbf{U})_k^* - B_{xk} (\mathbf{B} \cdot \mathbf{U})_k}{(S_k - S^*) \mu_e} \quad (26)$$

$$B_{yk}^* = \frac{(S_k - u_k - \bar{B}_k^* \bar{B}_k) B_{yk}^* - (B_{xk}^* - B_{xk}) v_k}{S_l - S^* - \bar{B}_k^* \bar{B}_k^*} \quad (27)$$

$$B_{zk}^* = \frac{(S_k - u_k - \bar{B}_k^* \bar{B}_k) B_{zk}^* - (B_{xk}^* - B_{xk}) w_k}{S_l - S^* - \bar{B}_k^* \bar{B}_k^*} \quad (28)$$

$$\bar{B}_k^* = \frac{B_{xk}^*}{\rho_k (S_k - u_k) \mu_e}, \quad \bar{B}_k = \frac{B_{xk}}{\rho_k (S_k - u_k) \mu_e} \quad (29)$$

式中 k 为 l, r。为了保证计算格式稳定,上述关系式还必须要满足 Toro 的相容性条件

$$\frac{S_l - S^*}{S_l - S_r} \mathbf{Q}_l^* + \frac{S_r - S^*}{S_r - S_l} \mathbf{Q}_r^* = \frac{S_r \mathbf{Q}_r - S_l \mathbf{Q}_l - (\mathbf{F}_r - \mathbf{F}_l)}{S_r - S_l} \quad (30)$$

经过推导可知,式(24)~式(28)并不满足相容性条件,若在波速 S^* 与压强 p^* 的计算方法不

改变的情况下,要使计算格式重新恢复相容性,则必须满足以下条件:

$$\begin{cases} B_{yl}^* = B_{yr}^*, & B_{zl}^* = B_{zr}^* \\ (\mathbf{B} \cdot \mathbf{U})_l^* = (\mathbf{B} \cdot \mathbf{U})_r^* \end{cases} \quad (31)$$

具体推导过程参见文献[13],在此不再累述。

由此可知,如何确定接触间断处磁感应强度,是 HLLC-MHD 格式的一个关键问题。本文采用 Li^[13] 提出的方法,使用 HLL 平均计算接触间断处的磁感应强度,如下:

$$\begin{cases} B_{xl}^* = B_{xr}^* = B_x^{\text{hll}} \\ B_{yl}^* = B_{yr}^* = B_y^{\text{hll}} \\ B_{zl}^* = B_{zr}^* = B_z^{\text{hll}} \\ (\mathbf{B} \cdot \mathbf{U})_l^* = (\mathbf{B} \cdot \mathbf{U})_r^* = \mathbf{B}^{\text{hll}} \cdot \mathbf{U}^{\text{hll}} \end{cases} \quad (32)$$

HLL 平均计算方法如下:

$$\mathbf{Q}^{\text{hll}} = \frac{S_r \mathbf{Q}_r - S_l \mathbf{Q}_l - (\mathbf{E}_r - \mathbf{E}_l)}{S_r - S_l} \quad (33)$$

经过上述修正后, HLLC-MHD 格式将重新满足相容性条件。

3 计算结果与分析

MHD 控制方程的空间离散采用格格式格的有限体积法,时间离散采用隐式 LU-SGS 格式,采用当地时间步长作为时间推进尺度,在一阶精度空间离散的基础上,应用 MUSCL 插值方法发展了二阶精度离散格式,并采用 Van Albada 限制器抑制强间断处的数值振荡,详见文献[13, 15],在此不再累述。

为了验证本文所发展的 HLLC-MHD 格式处理理想 MHD 方程的可靠性,本文针对一维 MHD 激波管问题与二维的 Rotor 问题展开了数值模拟研究。

3.1 一维 MHD 激波管问题

MHD 激波管问题最初由 Brio 与 Wu 等^[2] 提出,用于验证数值方法对理想 MHD 复杂磁流体力学波系结构的捕捉能力的标准算例。其认为流场中的电导率无限大,管道的无量纲长度为 $l = 800$,导电流体被 $X = 400$ 处的薄膜分隔为两部分,左边为高压区,右边为低压区,如图 1 所示。左右两侧的初始状态参数为

$$(\rho, p, u, B_x, B_y, B_z)_l = (1, 1, 0, 0.75, 1, 0)$$

$$(\rho, p, u, B_x, B_y, B_z)_r =$$

$$(1/8, 1/10, 0, 0.75, -1, 0)$$

计算网格沿着 x 方向被分为 800 个单元,每个单元长度 $\Delta x = 0.1$,时间步长 $\Delta t = 0.2$,当 $t = 0$

时开始计算,当 $t=80$ 时停止计算。

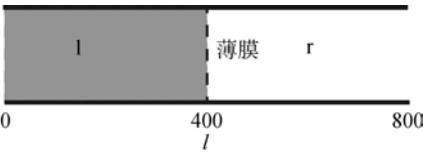
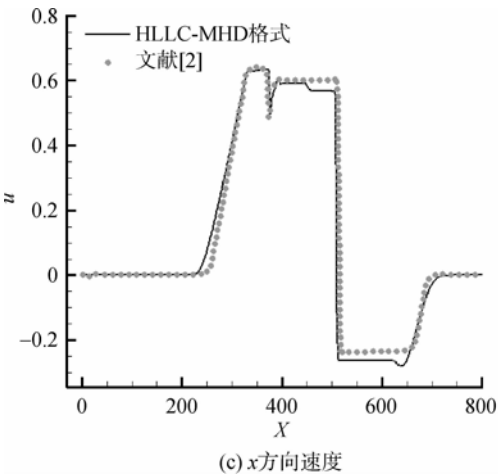


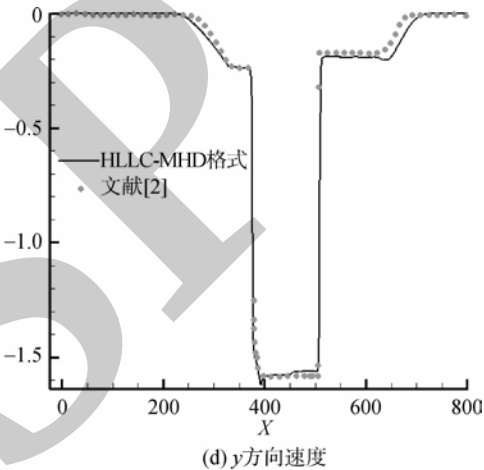
图 1 MHD 激波管示意图
Fig. 1 MHD shock-tube configuration

图 2 给出了 HLLC-MHD 格式计算结果与参考文献[2]的结果的对比曲线。图 2(a)为压强分布,通过与 Brio 等的差分方法计算结果对比发现,本文计算结果基本与其一致,最大数值误差不超过 10%;图 2(b)~图 2(e)分别为密度、 x 方向的速度、 y 方向的速度与 y 方向的磁感应强度分布曲线,同样与参考文献的结果高度吻合,最大数值误差也不超过 10%,表明本文发展的 HLLC-MHD 格式具有较高的计算精度。

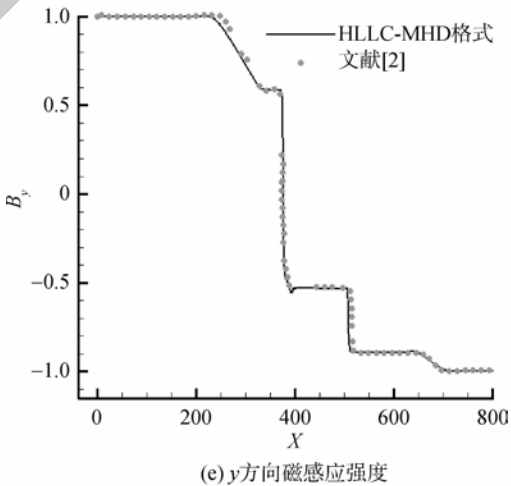
通过分析密度分布曲线可知,理想 MHD 激波管问题包含了十分复杂的波系结构。对于理想 MHD 方程,本文假定 B_x 为常数,同时方程中不



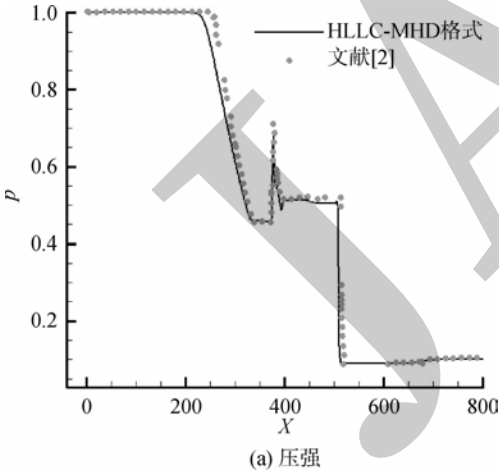
(c) x 方向速度



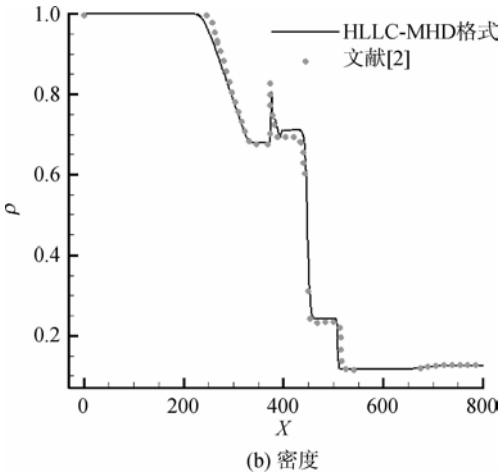
(d) y 方向速度



(e) y 方向磁感应强度



(a) 压强



(b) 密度

图 2 MHD 激波管问题计算结果
Fig. 2 MHD shock-tube simulating results

含 z 方向的速度 w 与磁感应强度 B_z 的方程,因此此时的理想 MHD 方程组实际上包含了 5 个特征值,对应 5 组磁流体波,如图 2(b)所示,从左至右依次为:左行稀疏波、慢复合波、接触间断、慢激波与右行稀疏波。而 HLLC-MHD 格式准确的识别出了 5 组复杂波系,验证了该格式在处理理

想 MHD 问题时的可靠性。

3.2 二维 Rotor 问题

Rotor 问题主要研究强扭转阿尔文波的传播,已经成为验证多维理想 MHD 数值模拟方法的一个重要算例。Rotor 问题的数值模拟区域为二维矩形区域 $(x,y) \in [0.0,1.0] \text{ m}$,初始磁场为沿 x 轴方向分布的均匀磁场,流场初始参数如下:

$$\rho = \begin{cases} 10 & r < 0.100 \text{ m} \\ 1 + 9f(r) & 0.100 \text{ m} \leq r < 0.115 \text{ m} \\ 1.0 & r > 0.100 \text{ m} \end{cases} \quad (34)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{U} = & \begin{cases} (-10\bar{y}u_0, 10\bar{x}u_0, 0) & r < 0.100 \text{ m} \\ \left(\frac{-\bar{y}f(r)u_0}{r}, \frac{\bar{x}f(r)u_0}{r}, 0\right) & 0.100 \text{ m} \leq r < 0.115 \text{ m} \\ (0, 0, 0) & r > 0.115 \text{ m} \end{cases} \end{aligned} \quad (35)$$

$$p(x,y) = 1 \text{ Pa}, \quad \mathbf{B} = (5, 0, 0) \text{ T} \quad (36)$$

$$\bar{y} = y - 0.5, \quad \bar{x} = x - 0.5 \quad (37)$$

式中

$$\begin{aligned} f(r) &= (23 - 200r)/3, \quad u_0 = 2 \text{ m/s} \\ r &= \sqrt{(x - 0.5)^2 + (y - 0.5)^2} \end{aligned}$$

流场的磁导率 $\mu_e = 4\pi$,气体比热比 $\gamma = 1.4$ 。本文采用基于结构网格的有限体积方法计模拟 Rotor 问题,计算网格包含 200×200 个单元,计算终止时间为 $t = 0.15 \text{ s}$ 。

图 3 为 Rotor 问题的初始流场参数分布云图,初始状态下,在 $r \leq 0.115 \text{ m}$ 的盘状区域内,流体绕中心 $(0.5, 0.5)$ 旋转,而旋转区域外围分布着静止的密度均匀的流体,且外围的密度要小于旋转区域的密度。

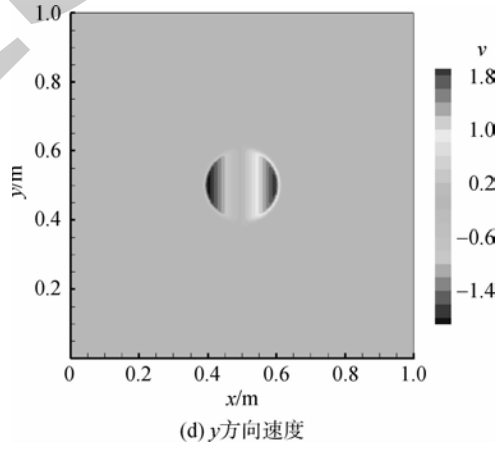
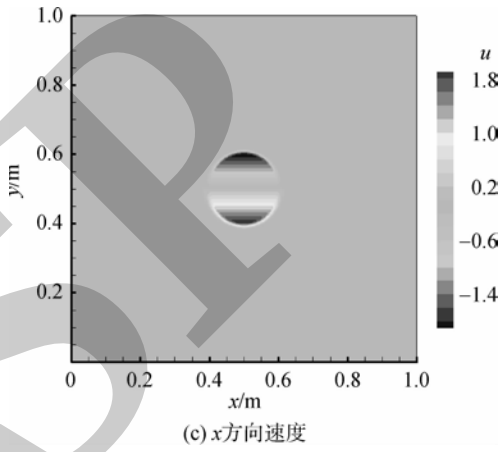
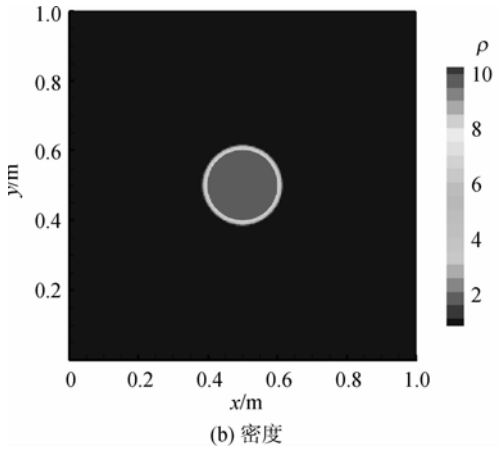
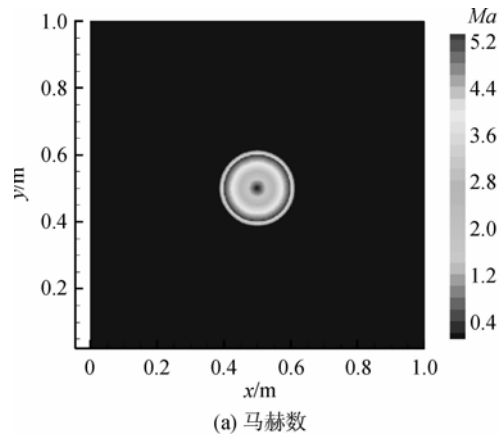


图 3 初始流场参数

Fig. 3 Initial flow field parameters

图 4 为 $t = 0.15 \text{ s}$ 时, Rotor 流场的马赫数、压强、密度、磁压 (p_{mgt})、速度以及磁感应强度矢量的分布图。由初始状态的密度、速度分布可知,初始状态的中心转动区域处于非平衡的状态,初始的均匀磁场将“缠绕”着旋转区域的流体,而流体的快速旋转将使得扭转阿尔文波向旋转区域的周围扩散开来,旋转体的角动量将减小,旋转区域的磁场将出现扭曲(如图 4(g)所示);由于磁场的扭曲,旋转体上、下的磁压增大,左、右的磁压减小

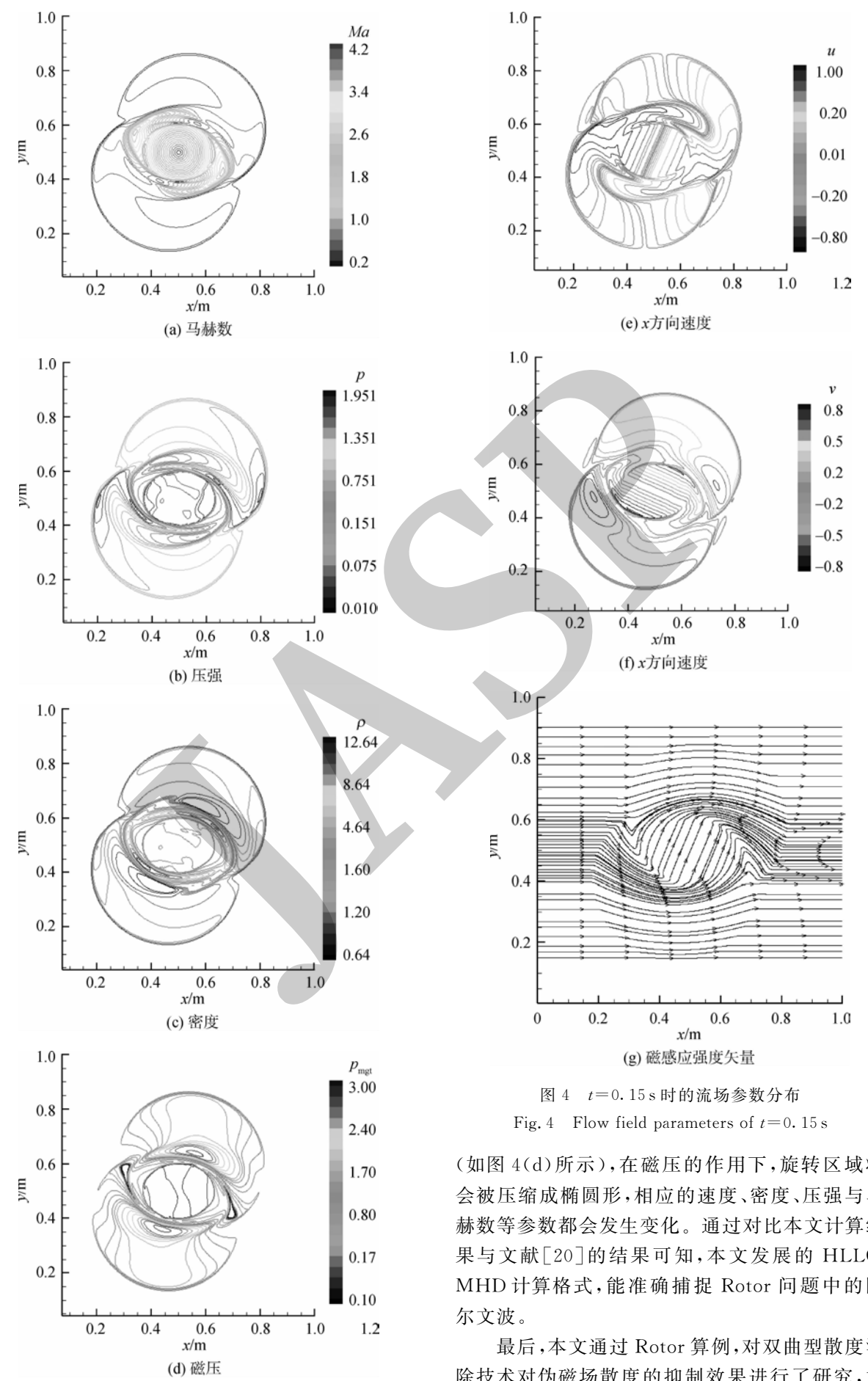
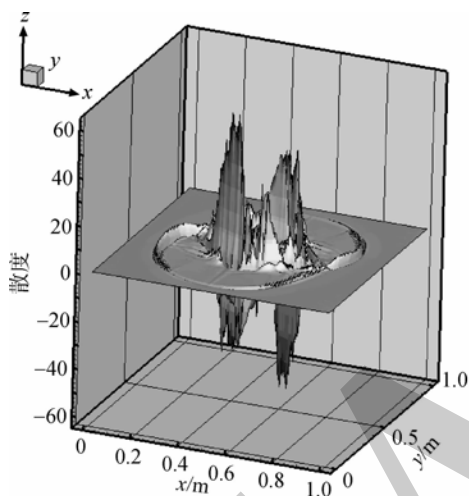


图 4 $t=0.15\text{ s}$ 时的流场参数分布
Fig. 4 Flow field parameters of $t=0.15\text{ s}$

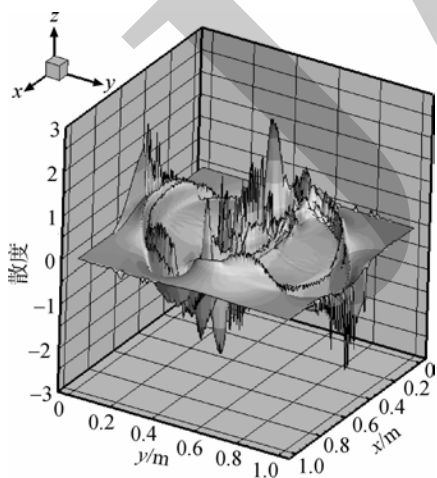
(如图 4(d)所示),在磁压的作用下,旋转区域将会被压缩成椭圆形,相应的速度、密度、压强与马赫数等参数都会发生变化。通过对比本文计算结果与文献[20]的结果可知,本文发展的 HLLC-MHD 计算格式,能准确捕捉 Rotor 问题中的阿尔文波。

最后,本文通过 Rotor 算例,对双曲型散度清除技术对伪磁场散度的抑制效果进行了研究,如

图 5 所示。由图可知,当未应用散度清除技术时,在流场剧烈变化区域,磁场散度将急剧增加,峰值达到 50 左右,而在平滑区域,磁场散度接近于零;当应用双曲型散度清除技术后,峰值处的磁场散度不超过 2。对比结果表明,双曲型散度清除技术能有效抑制磁场散度的积累,但是也有不足之处:首先,经过散度清除处理后,虽然抑制了高散度区较大的磁场散度,但也将误差带到了低散度区域,影响计算的稳定性;其次,在流场的边界处会出现磁场散度累积的情况,在处理复杂边界时会影响计算的稳定性。



(a) 无散度清除



(b) 双曲型散度清除

图 5 磁场散度分布

Fig. 5 Magnetic field divergence

4 结 论

本文在原始 HLLC 计算格式的基础上,通过引入修正,发展出了适用于理想 MHD 流动问题计算的 HLLC-MHD 格式,并进行了一维激波管

问题与二维 Rotor 问题的数值模拟,计算结果表明:

1) HLLC-MHD 计算格式可以准确的辨识与捕捉复杂的磁流体力学波系结构,具有较高的计算精度。

2) 通过 Rotor 问题的数值模拟表明,HLLC-MHD 计算格式能够准确捕捉多维理想 MHD 流动中的阿尔文波,有效处理多维理想 MHD 流动问题。

3) 本文所应用的双曲型散度清除技术能有效的抑制高散度区域磁场散度的累积,但是其会将误差传播到低散度区,并且会在边界处造成散度的累积增大。

HLLC 格式在处理高超声速流动问题是,在强激波附近会出现“红宝石”现象,容易出现非物理解,需要对格式作修正。将 HLLC-MHD 格式推广应用于高超声速理想 MHD 流动问题时,亦会出现类似的问题,有待于开展进一步的研究。

参考文献:

- [1] AUGUSTINUS J, HARADA S, AGARWAL R K, et al. Numerical solutions of the eight-wave structure ideal MHD equations by modified Runge-Kutta scheme with TVD[R]. AIAA 97-2398, 1997.
- [2] BRIO M, WU C C. An upwind differencing scheme for the equations of ideal magnetohydrodynamics[J]. Journal of Computational Physics, 1988, 75(2): 400-422.
- [3] ASLAN N. Numerical solutions of one-dimensional MHD equations by a fluctuation approach[J]. International Journal for Numerical Methods in Fluids, 1996, 22(7): 569-580.
- [4] ZACHARY A L, MALAGOLI A, COLELLA P. A higher-order Godunov method for multidimensional ideal magnetohydrodynamics[J]. SIAM Journal on Scientific Computing, 1994, 15(2): 263-284.
- [5] BARMIN A A, KULIKOVSKIY A G, POGORELOV N V. Shock-capturing approach and nonevolutionary solutions in magnetohydrodynamics[J]. Journal of Computational Physics, 1996, 126(1): 77-90.
- [6] HARADA S, HOFFMANN K A, AUGUSTINUS J. Development of a modified Runge-Kutta scheme with TVD limiters for the ideal two-dimensional MHD equations[R]. AIAA 98-0981, 1998.
- [7] AGARWAL R, AUGUSTINUS J, HALT D. A comparative study of advection upwind split (AUSM) and wave/particle split (WPS) schemes for fluid and MHD flows [R]. AIAA 99-3613, 1999.
- [8] MACCORMACK R W. An upwind conservation form method for the idea magnetohydrodynamics equations[R]. AIAA 99-3609, 1999.

[9] 赫新,陈建强,邓小刚. NND 格式在多维理想磁流体方程组中的应用[J]. 空气动力学学报,2005,23(3):267-273.
HE Xin, CHEN Jianqiang, DENG Xiaogang. NND scheme's application in multi-dimensional ideal magneto-hydrodynamic equations[J]. Acta Aerodynamica Sinica, 2005,23(3):267-273. (in Chinese)

[10] HARTEN A,LAX P D, VAN LEER B. On upstream differencing and Godunov-type Schemes for hyperbolic conservation laws[J]. SIAM Review,1983,25(1):35-61.

[11] TORO E F,SPRUCE M,SPEARES W. Restoration of the contact surface in the HLL-Riemann solver[J]. Shock Waves,1994,4(1):25-34.

[12] GURSKI K F. An HLLC-type approximate Riemann solver for ideal magnetohydrodynamics[J]. SIAM Journal on Scientific Computing,2004,25(6):2165-2187.

[13] LI S T. An HLLC Riemann solver for magneto-hydrodynamics[J]. Journal of Computational Physics,2005,203:344-357.

[14] MIYOSHI T,KUSANO K. A multi-state HLL approximate Riemann solver for ideal magnetohydrodynamics[J]. Journal of Computational Physics,2005,208:315-344.

[15] DEDNER A,KEMM F,KRONER D,et al. Hyperbolic divergence cleaning for the MHD equations[J]. Journal of Computational Physics,2002,175(2):645-673.

[16] BRACKBILL J U,BARNES D C. The effect of nonzero on the numerical solution of the magnetohydrodynamic equations[J]. Journal of Computational Physics,1980,35(3):426-430.

[17] EVANS C R,HWALEY J F. Simulation of magnetohydrodynamic flows: a constrained transport method[J]. The Astrophysical Journal,1988,332(2):659-677.

[18] TORO E F. Riemann solvers and numerical methods for fluid dynamics[M]. Berlin:Springer,2009.

[19] EINFELDT B. On Godunov-type methods for gas dynamics[J]. SIAM Journal on Numerical Analysis,1988,25(2):294-318.

[20] DONGWOOK L,ANIL E D. An unsplit staggered mesh scheme for multidimensional magnetohydrodynamics[J]. Journal of Computational Physics,2009,28(4):952-975.

(编辑:叶 青)